17-03-16

• Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων - Στατιστικό Τεστ

Παράδειγμα: Τριπλό Τεστ ~ Δοκιμαστής Κρασιών

Θέλουμε να τεστάρουμε την ικανότητά του να διακρίνει τα διαφορετικά είδη κρασιών

p = πιθανότητα σωστής διάκρισης
- $p = 1/3$ ~> Αν δεν είναι δοκιμαστής
- $p > 1/3$ ~> Αν είναι δοκιμαστής

• Μηδενική Υπόθεση {Null Hypothesis}: $H_0: p = \frac{1}{3}$

• Εναλλακτική Υπόθεση {Alternative Hypothesis}: $H_a: p > \frac{1}{3}$

Έστω n δοκιμές {από τριάδες}, ανεξάρτητες

X = αριθμός σωστών διακρίσεων στις n δοκιμές

$X \sim Bin(n, p)$

• $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, ..., n$

• $n = 10$, $C_5^* = \{5,6,7,8,9,10\}$, $C_8^* = \{8,9,10\}$, $X \sim B(10, p)$, $x = 0, 1, ..., 10$

~> Αποφασίστηκε με C_5, αν $x \geq 5$ -> απορρίπτω την H_0 } Είναι
~> Αποφασίστηκε με C_8, αν $x \geq 8$ -> απορρίπτω την H_0 } δοκιμαστής

*: κρίσιμες περιοχές ή περιοχές απόρριψης

• Προβλήματα κρίσιμων περιοχών

1) Πώς επιλέγονται - βρίσκονται οι κρίσιμες περιοχές;

2) Πώς αξιολογούνται;

		Αποδοχή H_0	Απόρριψη H_0
Πραγματικότητα	Αληθεύει η H_0	O πιθ. = $1-\alpha$	Σφάλμα I πιθ. = α
	Αληθεύει η H_a	Σφάλμα II πιθ. = β	O πιθ. = $1-\beta$

• Σφάλμα τύπου I: Αν απορρίψαμε τη μηδενική υπόθεση, ενώ αυτή αληθεύει.

• Σφάλμα τύπου II: Δεχόμαστε τη μηδενική ενώ αληθεύει η εναλλακτική υπόθεση.

• $\alpha = P($απόρριψη $H_0 \mid H_0$: αληθής$)$.

$\beta = P($αποδοχή $H_0 \mid H_a$: αληθής$)$

• α: Επίπεδο σημαντικότητας

• $\gamma = 1-\beta$: ισχύς του τεστ

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε:

- $\alpha(C_5) = P(X \geq 5) \mid X \sim Bin(n=10, p=1/3) = \sum_{x=5}^{10} \binom{10}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} = 0{,}2131$

- $\alpha(C_8) = P(X \geq 8) \mid X \sim Bin(n=10, p=1/3) = \sum_{x=8}^{10} \binom{10}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} = 0{,}0034$

Συνεπώς, η C_8 είναι καλύτερη κρίσιμη περιοχή.

- $\beta(C_5) = P(X \leq 4 \mid X \sim Bin(n=10, p=0{,}7)) =$

$$= \sum_{x=0}^{4} \binom{10}{x} (0{,}7)^{x} (0{,}3)^{10-x} = 0{,}0473$$

- $\beta(C_8) = P((X \leq 7) \mid X \sim Bin(10, 0{,}7)) =$

$$= \sum_{x=0}^{7} \binom{10}{x} (0{,}7)^{x} (0{,}3)^{10-x} = 0{,}6171$$

Συνεπώς, η C_5 είναι καλύτερη κρίσιμη περιοχή

! Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η καλύτερη κρίσιμη περιοχή απ' όλες είναι η $C_7 = \{7, 8, 9, 10\}$

~> Τα στοιχεία του τεστ <~

① Η μηδενική υπόθεση H_0 κι η εναλλακτική υπόθεση H_α

② Το προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας α

③ Η στατιστική συνάρτηση του τεστ κι η κρίσιμη περιοχή

④ Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης που προκύπτει απ' τα δεδομένα.

⑤ Το συμπέρασμα ~> {Αν η τιμή μετά είναι κρίσιμη περιοχή συνάρτησης}

~> Οι υποθέσεις διακρίνονται σε:

i) Μονόπλευρες: $p = \frac{1}{3}$ → $p \leq \frac{1}{3}$ → Αριστερόπλευρη
→ $p \geq \frac{1}{3}$ → Δεξιόπλευρη

ii) Δίπλευρες: $p \neq \frac{1}{3}$

~> α: Το ποσοστό σφάλματος (τύπου I) που είμαστε διατεθειμένοι να ανεχτούμε όταν απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

πχ: για $H_\alpha: p > \frac{1}{3}$ {δεξιόπλευρη} → $C = [c_\alpha, \infty)$

• Τιμή P (P-value)

p= Η πιθανότητα το στατιστικό να πάρει τιμές πιο ακραίες από αυτή που παρατηρήθηκε με κατανομή αυτή της μηδενικής υπόθεσης.

→ Απόφαση: Αν $p \leq \alpha$ → Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση